

- Note CEA-N-2209 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Division d'Etude et de Développement des Réacteurs
Département des Réacteurs à Eau
Service d'Etudes des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées

**DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE SPH :
HOMOGENÉISATION DE CELLULES DANS UN RÉSEAU NON UNIFORME
ET CALCUL DES PARAMETRES DE RÉFLECTEUR**

par

Alain HEBERT

- Septembre 1981 -

ANNEXE A

LE MAILLAGE D'INTÉGRATION SPATIO-ANGULAIRE DU CODE EURYDICE

Lorsque les options multicellules DP-0 ou DP-1 (§ 2.4.3) sont utilisées et que l'assemblage décrit comporte au moins une cellule hétérogène, il est nécessaire de se définir un maillage d'intégration numérique bidimensionnel [6]. Ce maillage est calculé lors de la directive "GEOMETRIE" du code APOLLO [2] et est ensuite utilisé, sur chaque groupe d'énergie, pour intégrer les probabilités de fuites (2.62) et (2.63) ainsi que les probabilités de transmission (2.65) à (2.76).

Chaque cellule hétérogène est composée d'un carré ou d'un rectangle, en son centre, une série d'anneaux concentriques délimitant les différentes régions du barreau combustible. Les I (NZ) régions ainsi formées sont numérotées à partir du centre de la cellule. Leurs volumes sont les suivants :

$$V_i = \pi R_{i+1}^2 - \pi R_i^2 \quad ; \quad i = 1, I - 1 \quad (A.1)$$

$$V_I = ab - \pi R_I^2$$

où a et b sont les longueurs des côtés de la cellule et où R_i et R_{i+1} sont respectivement les rayons internes et externes de la région i, avec $R_1 = 0$. Si $I = 1$, la cellule est homogène.

Le maillage sera utilisé pour intégrer numériquement les fonctions $F_{S_\alpha S_\beta} \{f_i(x, \varphi)\}$ suivantes :

1° - Cellule rectangulaire

$$F_{13}^+ \{f_i(x, \varphi)\} = \frac{2}{\pi a} \int_0^a dx \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin \varphi f_i(x, \varphi) \quad (A.2a)$$

$$F_{14}^+ \{f_i(x, \varphi)\} = \frac{4}{\pi a} \int_0^a dx \int_{\varphi^*}^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi f_i(x, \varphi) \quad (A.2b)$$

où le signe "+" désigne le résultat d'une intégration analytique et où :

$$\varphi^* = \tan^{-1} \frac{b}{a-x}$$

$$F_{23}^+ \{f_i(y, \varphi)\} = \frac{4}{\pi b} \int_0^b dy \int_{\varphi^{**}}^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi f_i(y, \varphi) \quad (A.2c)$$

$$\text{où } \varphi^{**} = \tan^{-1} \frac{a}{b-y}$$

2° - Cellule carrée

$$F_{13}^+ \{f_1(x, \varphi)\} = \frac{4}{\pi a} \int_0^a dx \int_0^{\pi/4} d\varphi \sin \varphi f_1(x, \varphi) \quad (\text{A.3a})$$

$$F_{14}^+ \{f_1(x, \varphi)\} = \frac{4}{\pi a} \int_0^a dx \int_{\varphi^*}^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi f_1(x, \varphi) \quad (\text{A.3b})$$

$$\text{où } \varphi^* = \tan^{-1} \frac{a}{a-x}$$

$$F_{23}^+ \{f_1(y, \varphi)\} = F_{14}^+ \{f_1(x, \varphi)\} \quad (\text{A.3c})$$

Les différents domaines d'intégration en angle, pour une valence donnée de x ou de y sont illustrés aux figures A.1 et A.2.

Pour leur calcul pratique, les intégrations en angle et en espace des équations (A.2) et (A.3) sont permutées. On commence par diviser le domaine d'intégration $(0, \pi/2)$ en J (NA) valeurs discrètes (J est un nombre pair) :

$$\varphi_j = \frac{\pi}{2J} (j - 0.5) \quad ; \quad j = 1, J \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta\varphi_j = \frac{\pi}{2J} \quad ; \quad j = 1, J$$

Pour chaque angle φ_j , on trace un ensemble de lignes d'intégration parallèles, chacune d'entre elles étant composée d'un nombre de segments compris entre 1 et $2I-1$. Le domaine d'intégration en espace E est alors divisé en sous-domaines à l'intérieur desquels toutes les lignes d'intégration possèdent le même nombre de segments. Dans chaque sous-domaine, on trace NX lignes d'intégrations équidistantes. Soient $\{\Delta s_k ; k = 1, K(j)\}$ les distances entre les $K(j)$ lignes associées à l'angle φ_j .

On a :

$$\Delta x_k = \frac{\Delta s_k}{\sin \varphi_j} \quad ; \quad k = 1, K(j) \quad (\text{A.5})$$

Nous pouvons maintenant écrire les équations (A.2) et (A.3) sous leur forme discrétisée :

1° - Cellule rectangulaire

$$F_{13} \{f_1(x, \varphi)\} = \frac{1}{aJ} \sum_{j=1}^J \sum_{k \in D_{13}} \Delta s_k f_1(x_k, \varphi_j) \quad (\text{A.6a})$$

$$\text{où } D_{13} = \{k \mid x_k > a - b \tan \varphi_j\}$$

$$F_{14}\{f_i(x, \varphi)\} = \frac{2}{aJ} \sum_{j \in C_{14}} \sum_{k \in D_{14}} \Delta s_k f_i(x_k, \varphi_j) \quad (\text{A.6b})$$

$$\text{où } C_{14} = \left\{ j \mid \varphi_j > \tan^{-1} \frac{b}{a} \right\}$$

$$D_{14} = \left\{ k \mid x_k < a - b \tan \varphi_j \right\}$$

$$F_{23}\{f_i(y, \varphi)\} = \frac{2}{bJ} \sum_{j \in C_{23}} \sum_{k \in D_{23}} \Delta s_k f_i(y_k, \varphi_j) \quad (\text{A.6c})$$

$$\text{où } C_{23} = \left\{ j \mid \varphi_j > \tan^{-1} \frac{a}{b} \right\}$$

$$D_{23} = \left\{ k \mid y_k < b - a \tan \varphi_j \right\}$$

2° - Cellule carrée

$$F_{13}\{f_i(x, \varphi)\} = \frac{2}{aJ} \sum_{j=1}^{J/2} \sum_{k \in D_{13}} \Delta s_k f_i(x_k, \varphi_j) \quad (\text{A.7a})$$

$$F_{14}\{f_i(x, \varphi)\} = \frac{2}{aJ} \sum_{j \in C_{14}} \sum_{k \in D_{14}} \Delta s_k f_i(x_k, \varphi_j) \quad (\text{A.7b})$$

Pour chaque angle φ_j , on calcule les quantités suivantes qui formeront notre maillage d'intégration :

1° - Cellule rectangulaire

• n_{13} : nombre de lignes d'intégration utilisées pour le calcul des fonctions F_{13} à l'angle φ_j .

Si $n_{13} \neq 0$, on donne les renseignements suivants :

• $\sin \varphi_j$

• $\cos \varphi_j$

• n_{13} fois : $Z = \frac{\Delta s_k}{aJ}$

• m : nombre de régions traversées par la ligne d'intégration.

• $\{x_{1l}(x_k, \varphi_j) ; l = 1, 2, m - 1\}$: longueurs des segments de la ligne d'intégration.

• n_{14} : nombre de lignes d'intégration utilisées pour le calcul des fonctions F_{14} à l'angle φ_j .

Si $n_{14} \neq 0$, on donne les renseignements suivants :

• $\sin \varphi_j$

• n_{14} fois : $Z = \frac{2 \Delta s_k}{aJ}$

. m

$$\cdot \{X_{11}(x_k, \varphi_j) ; 1 = 1, 2 m - 1\}$$

. n_{23} : nombre de lignes d'intégration utilisées pour le calcul des fonctions F_{23} à l'angle φ_j .

Si $n_{23} \neq 0$, on donne les renseignements suivants :

. $\sin \varphi_j$

$$\cdot n_{23} \text{ fois : } \cdot Z = \frac{2 \Delta s_k}{bJ}$$

. m

$$\cdot \{X_{21}(y_k, \varphi_j) ; 1 = 1, 2 m - 1\}.$$

2° - Cellule carrée

Le maillage d'intégration est identique, avec $n_{23} = 0$ de façon systématique.

Les longueurs des segments $X_{\alpha 1}(x, \varphi)$ (figure A.3) se calculent par trigonométrie, en utilisant la figure A.4 où :

$$d = \frac{b}{2} \cos \varphi_j + (x_k - \frac{a}{2}) \sin \varphi_j \quad (\text{A.8})$$

$$c = \left[\frac{b}{2} \sin \varphi_j - (x_k - \frac{a}{2}) \cos \varphi_j \right] - \sqrt{R^2 - d^2} \quad (\text{A.9})$$

Pour chaque angle φ_j et pour chaque sous-domaine E d'intégration en espace, il est possible d'utiliser le maillage précédemment défini pour calculer numériquement les volumes W_i des régions traversées par les lignes d'intégration :

$$W_{\alpha i} = \sum_{k \in E} \Delta s_k X_{\alpha i}(x_k, \varphi_j) \quad ; \quad i = 1, I \quad (\text{A.10})$$

Ce sous-domaine E est délimité par deux lignes respectivement distantes de d_1 et d_2 par rapport au centre de la cellule (figure A.4). Définissons :

$$G_i(d) = \begin{cases} R_i^2 \cos^{-1} \frac{d}{R_i} - d \sqrt{R_i^2 - d^2} & \text{si } 0 \leq d \leq R_i \\ 0 & \text{si } d > R_i \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

; $i = 1, I$

Les valeurs exactes des sous-volumes $W_{\alpha i}$ sont alors :

$$W_{\alpha 1}^+ = G_2(d_1) - G_2(d_2)$$

$$W_{\alpha i}^+ = G_{i+1}(d_1) - G_{i+1}(d_2) - \sum_{l=1}^{i-1} W_{\alpha l}^+ \quad ; \quad i = 2, I-1 \quad (\text{A.12})$$

$$W_{\alpha I}^+ = \begin{cases} 0.5 \tan \varphi_j [(a - x_1)^2 - (a - x_2)^2] - \sum_{l=1}^{I-1} W_{\alpha l}^+ & \text{si } x_1 > a - b \tan \varphi_j \\ b(x_2 - x_1) - \sum_{l=1}^{I-1} W_{\alpha l}^+ & \text{si } x_2 < a - b \tan \varphi_j \end{cases}$$

En raison des erreurs de discrétisation, les volumes calculés numériquement $W_{\alpha I}^+$ seront légèrement différents des volumes exacts $W_{\alpha I}^+$. Cette erreur est d'autant plus faible que le nombre de lignes d'intégration est grand (paramètres J et IX). Mais l'augmentation du nombre de lignes apporte deux inconvénients lors du calcul des probabilités de collision :

- 1° - Le temps de calcul numérique des probabilités de collision augmente très rapidement avec le nombre de lignes.
- 2° - Lorsque le nombre de lignes est grand, les probabilités de collision seront formées d'un très grand nombre de petites contributions numériques qui peuvent subir des erreurs d'arrondi.

Nous avons donc adopté le principe d'un calcul utilisant au mieux un petit nombre de lignes d'intégration normalisées de façon à préserver les volumes $W_{\alpha I}^+$ pour chaque angle φ_j et pour chaque sous-domaine E :

$$\tilde{X}_{\alpha I}^+(x_k, \varphi_j) = \frac{W_{\alpha I}^+}{W_{\alpha I}^+} X_{\alpha I}^+(x_k, \varphi_j) \quad ; \quad k \in E \quad (\text{A.13})$$

A.1 - ORTHONORMALISATION NUMERIQUE

Nous avons vu à la section 2.1 que les probabilités de collision ont été définies de façon à correspondre à un développement limité du flux angulaire de surface sur une base orthonormale. Les coefficients d'orthonormalité "analytiques" (e_1^+ , e_2^+ , e_3^+ , e_4^+) ont été calculés pour respecter la condition d'orthonormalité (2.7) :

$$\int_0^\pi d\varphi \sin \varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \psi^V(\vec{\Omega}) \psi^P(\vec{\Omega}) = \pi \delta_{VP} \quad (\text{A.14})$$

pour $\vec{n} = (0, 1, 0)$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \psi^1(\vec{\Omega}) &= e_1 \\ \psi^2(\vec{\Omega}) &= e_2 \sin \varphi \sin \theta - e_3 \\ \psi^3(\vec{\Omega}) &= e_4 \cos \varphi \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

En calculant analytiquement les différentes intégrales on a obtenu :

$$\begin{aligned} e_1^+ &= 1 & e_2^+ &= 3\sqrt{2} \\ e_3^+ &= 2\sqrt{2} & e_4^+ &= 2 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Nous n'avons pas pris en compte la composante en $\cos \theta$ du flux angulaire de surface, pour des raisons de symétrie (calcul bidimensionnel).

S'il était possible de calculer analytiquement les probabilités de collision, le processus d'orthonormalisation précédemment décrit préserverait toutes les relations de conservation et de réciprocité (2.21) à (2.23), (2.26) et (2.27).

Notre schéma de calcul consiste en une intégration analytique sur θ (2.5) et en une intégration numérique sur φ (équation A.4). A cause de cette dernière, les différentes probabilités de collision ne vont pas satisfaire les relations de conservation et de réciprocité. En conséquence, deux approches sont alors possibles :

- 1° - Les probabilités de collision sont orthonormalisées à l'aide des coefficients (A.16) puis normalisées de façon à forcer le respect des relations de conservation et de réciprocité. Le processus de normalisation n'est pas défini de façon unique : on peut normaliser les probabilités de fuite en fonction des probabilités de transmission, ou le contraire. Une approche de ce type est utilisée dans NAUSICAA [6].
- 2° - Les probabilités de collision sont orthonormalisées par des coefficients e_1 à e_4 calculés numériquement à l'aide de la même intégration numérique en φ que celle utilisée pour le calcul des probabilités de collision. Dans ce cas, on peut montrer que les nouvelles probabilités de collision orthonormales préservent toutes les relations de conservation et de réciprocité. Cette méthode est utilisée dans EURYDICE car elle nous paraît plus rigoureuse.

Discretisons l'équation (A.14) après avoir effectué analytiquement l'intégration en θ :

$$Z_1 e_1^2 = 1$$

$$\frac{8}{3\pi} Z_2 e_2 - Z_1 e_3 = 0 \quad (A.17)$$

$$\frac{3}{4} Z_3 e_2^2 - \frac{16}{3\pi} Z_2 e_2 e_3 + Z_1 e_3^2 = 1$$

$$\frac{3}{4} (Z_1 - Z_3) e_4^2 = 1$$

$$\text{où : } Z_1 = \frac{2}{\pi J} \sum_{j=1}^J \sin \varphi_j \quad (Z_1^+ = 1)$$

$$Z_2 = \frac{2}{\pi J} \sum_{j=1}^J (\sin \varphi_j)^2 \quad (Z_2^+ = \pi/4) \quad (A.18)$$

$$Z_3 = \frac{2}{\pi J} \sum_{j=1}^J (\sin \varphi_j)^3 \quad (Z_3^+ = 2/3)$$

On obtient alors les facteurs d'orthonormalisation numériques :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{z_1}}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} z_3 - \frac{64}{9\pi^2 z_1} z_2^2}}$$

$$e_3 = \frac{8}{3\pi} e_2 \frac{z_2}{z_1}$$

$$e_4 = \frac{2}{\sqrt{3(z_1 - z_3)}}$$

(A.19)

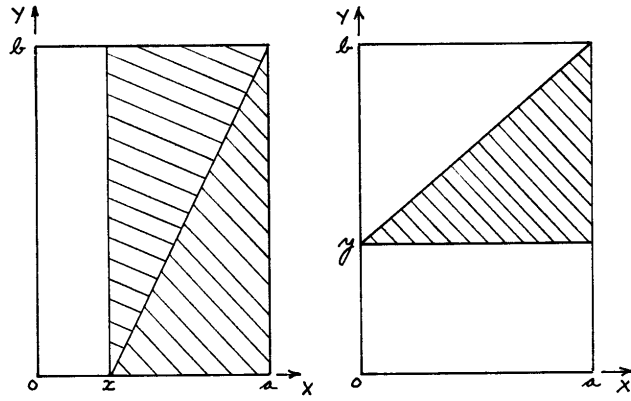


FIGURE A-1 Domaine d'intégration angulaire. Cellule rectangulaire.

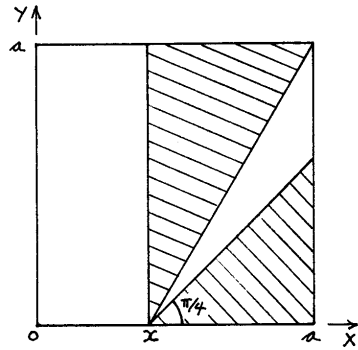


FIGURE A-2 Domaine d'intégration angulaire. Cellule carrée.

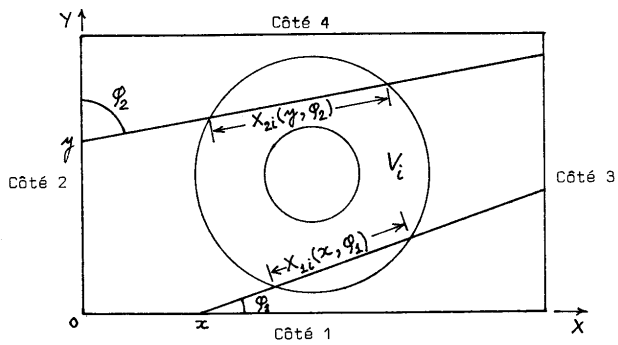


FIGURE A-3 Interception des lignes d'intégration avec la géométrie de la cellule.

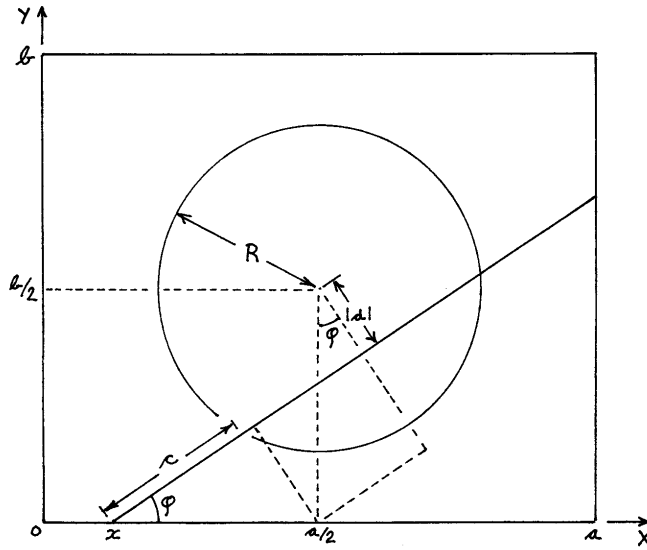


FIGURE A-4 Calcul des segments d'une ligne d'intégration.

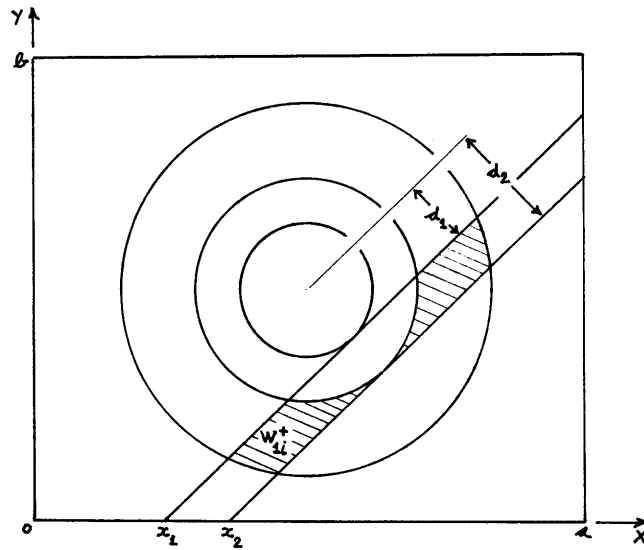


FIGURE A-5 Calcul des sous-volumes w_{a1}^+

ANNEXE B

CALCUL DES PROBABILITÉS DE COLLISION D'UNE CELLULE HOMOGÈNE

Si la cellule homogène possède une section efficace macroscopique totale Σ_t non nulle, il suffit de calculer les probabilités de transmission $T_{S_\alpha S_\beta}^{p\nu}$. Les autres probabilités se déduisent alors des relations de réciprocité (2.21), (2.22)^B et de conservation (2.26), (2.27) :

$$P_{S_\alpha i}^p = \frac{1}{\Sigma_t} \left[\delta_{1p} - \sum_{\beta} P_{S_\alpha S_\beta}^{p1} \right] \quad (\text{B.1a})$$

$$P_{i S_\alpha}^p = \frac{S_\alpha}{4 V_i} P_{S_\alpha i}^p \quad (\text{B.1b})$$

$$P_{ii} = \frac{1}{\Sigma_t} \left[1 - \sum_{\alpha} P_{i S_\alpha}^1 \right] \quad (\text{B.1c})$$

B.1 - ETUDE DU CYLINDRE HOMOGÈNE

Nous ne considérerons que la composante isotrope du développement angulaire du flux de surface. Nous allons évaluer l'équation (2.65) sur la géométrie décrite à la figure B.1. On obtient :

$$P_{SS}^{11} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi K_{i3}(2\Sigma_t R \cos \varphi) \quad (\text{B.2})$$

B.1.1 - Etude du cylindre vide

Dans ce cas, nous utilisons un développement limité de la fonction de Bickley Naylor $K_{i3}(x)$:

$$\begin{aligned} K_{i3}(x) &= K_{i3}(0) + x \left. \frac{dK_{i3}}{dx} \right|_{x=0} + \frac{x^2}{2} \left. \frac{d^2 K_{i3}}{dx^2} \right|_{x=0} + O(x^3) \\ &= \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} x^2 + O(x^3) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

On obtient alors :

$$P_{SS}^{11} = 1 - 2R\Sigma_t + \frac{8}{3} (R\Sigma_t)^2 + O(R^3 \Sigma_t^3) \quad (\text{B.4a})$$

$$P_{Si}^1 = 2R - \frac{8}{3} R^2 \Sigma_t + O(R^3 \Sigma_t^2) \quad (\text{B.4b})$$

$$P_{iS}^1 = 1 - \frac{4}{3} R\Sigma_t + O(R^2 \Sigma_t^2) \quad (\text{B.4c})$$

$$P_{ii} = \frac{4R}{3} + O(R\Sigma_t) \quad (\text{B.4d})$$

Cette dernière équation correspond à un facteur Q égal à :

$$Q = \frac{\langle X^2 \rangle}{\langle X \rangle^2} = \frac{4}{3}$$

où X est une corde du cylindre de rayon R.

B.1.2 - Dérivées des probabilités de collision

Dérivons par rapport à Σ_t l'équation (B.2) :

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{SS}^{11} = - \frac{BR}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2 \varphi K_{i_2}(2\Sigma_t R \cos \varphi) \quad (B.5)$$

Dans le cas où $\Sigma_t \neq 0$, on aura de plus, de (B.1) :

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{Si}^1 = - \frac{1}{\Sigma_t^2} (1 - P_{SS}^{11}) - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{SS}^{11} \quad (B.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{iS}^1 = \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{Si}^1 \quad (B.6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{ii}^1 = - \frac{1}{\Sigma_t^2} (1 - P_{iS}^1) - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{iS}^1 \quad (B.6c)$$

Dans le cas où $\Sigma_t = 0$, ces quantités sont obtenues par simple dérivation algébrique des équations (B.4).

B.2 - ETUDE DU RECTANGLE HOMOGÈNE

Nous allons évaluer les équations (2.65) à (2.76) sur la géométrie décrite à la figure B.2.

a) $\rho = 1$ et $\nu = 1$ (1, 2, 3, 4)

$$P_{S_1 S_3}^{11} = \frac{2}{\pi a} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \int_{a-b \tan \varphi}^a dl K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t (a-1)}{\sin \varphi} \right] + \int_{\varphi^*}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi \int_0^a dl K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t (a-1)}{\sin \varphi} \right] \right\}$$

$$\text{où } \varphi^* = \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

$$P_{S_1 S_3}^{11} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{2}{3} - K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{2}{3} - K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$P_{S_1 S_4}^{11} = \frac{2}{\pi a} \left\{ \int_{-\varphi^*}^0 d\varphi \cos \varphi \int_{b \tan(-\varphi)}^a dl K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \int_0^{a - b \tan \varphi} dl K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right\} \\ = \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi (\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi) K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

$$P_{S_1 S_2}^{11} = \frac{2}{\pi a} \left\{ \int_{-\varphi^*}^0 d\varphi \cos \varphi \int_0^{b \tan(-\varphi)} dl K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t l}{\sin(-\varphi)} \right] \right. \\ \left. + \int_{-\pi/2}^{-\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \int_0^a dl K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t l}{\sin(-\varphi)} \right] \right\} \\ = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{2}{3} - K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{2}{3} - K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

Si la cellule est carrée, ces équations se simplifient pour donner :

$$P_{S_1 S_2}^{11} = P_{S_1 S_3}^{11} = \frac{4}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{2}{3} - K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

$$P_{S_1 S_4}^{11} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} d\varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) K_{i_3} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right]$$

b) $\rho = 1$ et $\nu = 2$ (5, 6, 7, 8)

$$T_{S_1 S_3}^{12} = T_{S_1 S_2}^{12} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$T_{S_1 S_4}^{12} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

Si la cellule est carrée, on a :

$$T_{S_1 S_3}^{12} = T_{S_1 S_2}^{12} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

$$T_{S_1 S_4}^{12} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right]$$

c) $\rho = 1$ et $\nu = 3$ (17, 18)

$$-T_{S_1 S_3}^{13} = T_{S_1 S_2}^{13} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$T_{S_1 S_4}^{13} = 0.$$

Si la cellule est carrée, on a :

$$-T_{S_1 S_3}^{13} = T_{S_1 S_2}^{13} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

e) $\rho = 2$ et $\nu = 1$ (9, 10, 11, 12)

$$T_{S_1 S_3}^{21} = T_{S_1 S_2}^{21} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$T_{S_1 S_4}^{21} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

Si la cellule est carrée on a :

$$T_{S_1 S_3}^{21} = T_{S_1 S_2}^{21} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

$$T_{S_1 S_4}^{21} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) K_{i_4} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right]$$

f) $\rho = 2$ et $\nu = 2$ (13, 14, 15, 16)

$$T_{S_1 S_3}^{22} = T_{S_1 S_2}^{22} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{8}{15} - K_{i_6} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{8}{15} - K_{i_6} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\} \\ T_{S_1 S_4}^{22} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

Si la cellule est carrée on a :

$$T_{S_1 S_3}^{22} = T_{S_1 S_2}^{22} = \frac{4}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{8}{15} - K_{i_6} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \\ T_{S_1 S_4}^{22} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos^2 \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right]$$

g) $\rho = 2$ et $\nu = 3$ (21, 22)

$$-T_{S_1 S_3}^{23} = T_{S_1 S_2}^{23} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos^3 \varphi \sin \varphi \left[\frac{8}{15} - K_{i_6} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^3 \varphi \left[\frac{8}{15} - K_{i_6} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$T_{S_1 S_4}^{23} = 0$$

Si la cellule est carrée on a :

$$-T_{S_1 S_3}^{23} = T_{S_1 S_2}^{23} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{8}{15} - K_{i_6} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

g) $\rho = 3$ et $\nu = 1$ (19, 20)

$$T_{S_1 S_3}^{31} = -T_{S_1 S_2}^{31} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi \left[\frac{3\pi}{16} - K_{i_5} \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$T_{S_1 S_4}^{31} = 0.$$



Si la cellule est carrée on a :

$$T_{S_1 S_3}^{31} = -T_{S_1 S_2}^{31} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) \left[\frac{3\pi}{16} - Ki_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

j) $\rho = 3$ et $\nu = 2$ (23, 24)

$$T_{S_1 S_3}^{32} = -T_{S_1 S_2}^{32} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^3 \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos^3 \varphi \sin \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$= T_{S_1 S_3}^{44} - T_{S_1 S_3}^{23}$$

$$T_{S_1 S_4}^{32} = 0.$$

Si la cellule est carrée on a :

$$T_{S_1 S_3}^{32} = -T_{S_1 S_2}^{32} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

k) $\rho = 3$ et $\nu = 3$ (25, 26, 27, 28)

$$-T_{S_1 S_3}^{33} = -T_{S_1 S_2}^{33} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$T_{S_1 S_4}^{33} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin^2 \varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) Ki_5 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

$$= T_{S_1 S_4}^{44} - T_{S_1 S_4}^{22}$$

Si la cellule est carrée on a :

$$-T_{S_1 S_3}^{33} = -T_{S_1 S_2}^{33} = \frac{4}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

$$T_{S_1 S_4}^{33} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} d\varphi \sin^2 \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) Ki_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right]$$

1) $\rho = 4$ et $\nu = 4$ (29, 30, 31, 32)

$$T_{S_1 S_3}^{44} = T_{S_1 S_2}^{44} = \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right] \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right] \right\}$$

$$T_{S_1 S_4}^{44} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) Ki_5 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

Si la cellule est carrée on a :

$$T_{S_1 S_3}^{44} = T_{S_1 S_2}^{44} = \frac{4}{\pi a \Sigma_t} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{8}{15} - Ki_6 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right]$$

$$T_{S_1 S_4}^{44} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} d\varphi \left(\cos \varphi - \sin \varphi \right) Ki_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right]$$

B.2.1 - Etude du rectangle vide

Dans ce cas, nous utilisons un développement limité des fonctions de Bickley Naylor :

$$Ki_3(x) = \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} x^2 + O(x^3)$$

$$Ki_4(x) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3 + O(x^4)$$

$$Ki_5(x) = \frac{3\pi}{16} - \frac{2}{3} x + \frac{\pi}{8} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + O(x^4)$$

$$Ki_6(x) = \frac{8}{15} - \frac{3\pi}{16} x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{\pi}{24} x^3 + O(x^4)$$

On obtient alors :

a) $\rho = 1$ et $\nu = 1$

$$P_{S_1 S_3}^{11} = P_{S_1 S_2}^{11} = \frac{a+b-R}{2a} + \frac{\Sigma_t}{\pi a} \left(a^2 \ln \frac{a}{R} + b^2 \ln \frac{b}{R} \right) + \frac{\Sigma_t^2}{6a} (R^3 - a^3 - b^3) + O(x^3 \Sigma_t^3)$$

où :

$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$P_{S_1 S_4}^{11} = \frac{R-b}{a} - \frac{4\Sigma_t}{\pi} \left(b \tan^{-1} \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a} \ln \frac{b}{R} \right) + (\Sigma_t b)^2 \left(\ln \frac{R+a}{b} - \frac{R-b}{a} \right) + O(x^3 \Sigma_t^3)$$

donc :

$$\begin{aligned}
 P_{S_1 \partial D}^{11} &= \sum_{\beta} P_{S_1 S_{\beta}}^{11} \\
 &= 1 + \frac{2\Sigma_t}{\pi a} (a^2 \ln \frac{a}{R} - b^2 \ln \frac{b}{R} - 2ab \tan^{-1} \frac{a}{b}) \\
 &\quad + \Sigma_t^2 \left[\frac{1}{3a} (R^3 - a^3 - b^3) - b^2 \frac{R-b}{a} + b^2 \ln \frac{R+a}{b} \right] \\
 &\quad + O(\chi^3 \Sigma_t^3)
 \end{aligned}$$

b) $\rho = 1$ et $\nu = 2$

$$\begin{aligned}
 T_{S_1 S_3}^{-12} &= T_{S_1 S_2}^{-12} = \frac{2}{3\pi} \frac{b}{a} \tan^{-1} \frac{a}{b} + \frac{\Sigma_t}{4} \left(-\frac{b^2}{a} \ln \frac{R+a}{b} + R - a \right) \\
 &\quad + \frac{\Sigma_t^2}{3\pi} \left(b^2 - \frac{b^3}{a} \tan^{-1} \frac{a}{b} - a^2 \ln \frac{a}{R} \right) + O(\chi^3 \Sigma_t^3) \\
 T_{S_1 S_4}^{-12} &= \frac{4}{3\pi} \tan^{-1} \frac{a}{b} - \Sigma_t \frac{b(R-b)}{a} + \frac{2\Sigma_t^2}{\pi} \left(b^2 \tan^{-1} \frac{a}{b} + \frac{b^3}{a} \ln \frac{b}{R} \right) + O(\chi^3 \Sigma_t^3)
 \end{aligned}$$

c) $\rho = 1$ et $\nu = 3$

$$\begin{aligned}
 -T_{S_1 S_3}^{-13} &= T_{S_1 S_2}^{-13} = \frac{2}{3\pi} \tan^{-1} \frac{b}{a} + \frac{\Sigma_t}{4} \left[-a \ln \frac{R+b}{a} + \frac{b}{a} (R-b) \right] \\
 &\quad + \frac{\Sigma_t^2}{3\pi} \left(-\frac{b^3}{a} \ln \frac{b}{R} + ab - a^2 \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + O(\chi^3 \Sigma_t^3) \\
 T_{S_1 S_4}^{-13} &= 0
 \end{aligned}$$

e) $\rho = 2$ et $\nu = 1$

$$\begin{aligned}
 T_{S_1 S_3}^{-21} &= T_{S_1 S_2}^{-21} = \frac{2}{3\pi} \tan^{-1} \frac{b}{a} + \frac{\Sigma_t}{4} \left[-a \ln \frac{R+b}{a} + \frac{b}{a} (R-b) \right] \\
 &\quad + \frac{\Sigma_t^2}{3\pi} \left(-\frac{b^3}{a} \ln \frac{b}{R} + ab - a^2 \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + O(\chi^3 \Sigma_t^3) \\
 T_{S_1 S_4}^{-21} &= \frac{4}{3\pi} \tan^{-1} \frac{a}{b} - \Sigma_t \frac{b(R-b)}{a} + \frac{2\Sigma_t^2}{\pi} \left(b^2 \tan^{-1} \frac{a}{b} + \frac{b^3}{a} \ln \frac{b}{R} \right) + O(\chi^3 \Sigma_t^3)
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 T_{S_1 \partial D}^{-21} &= \frac{2}{3} - \frac{\Sigma_t}{2} \left[a \ln \frac{R+b}{a} + \frac{b}{a} (R-b) \right] \\
 &\quad + \frac{2\Sigma_t^2}{3\pi} \left(ab + \frac{2b^3}{a} \ln \frac{b}{R} + 3b^2 \tan^{-1} \frac{a}{b} - a^2 \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \\
 &\quad + O(\chi^3 \Sigma_t^3)
 \end{aligned}$$

f) $\rho = 2$ et $\nu = 2$

$$T_{S_1 S_3}^{22} = T_{S_1 S_2}^{22} = \frac{b}{8R} - \frac{\Sigma_t}{3\pi} \left(\frac{b^2}{a} \tan^{-1} \frac{a}{b} + a \tan^{-1} \frac{b}{a} - b \right) \\ + \frac{\Sigma_t^2}{12} \left(\frac{b^3}{a} \ln \frac{R+a}{b} + a^2 \ln \frac{R+b}{a} - bR \right) + O(X^3 \Sigma_t^3)$$

$$T_{S_1 S_4}^{22} = \frac{1}{4a} \left(\frac{a^2}{R} + R - b \right) - \frac{4\Sigma_t}{3\pi} b \tan^{-1} \frac{a}{b} + \Sigma_t^2 \frac{b^2(R-b)}{2a} + O(X^3 \Sigma_t^3)$$

g) $\rho = 2$ et $\nu = 3$

$$-T_{S_1 S_3}^{23} = T_{S_1 S_2}^{23} = \frac{1}{8} \left(2 + \frac{b}{a} - \frac{a}{R} - \frac{R}{a} \right) + \frac{2\Sigma_t}{3\pi} a \ln \frac{a}{R} \\ + \frac{\Sigma_t^2}{12} \left[2a(R-a) + \frac{b^2}{a} (R-b) \right] + O(X^3 \Sigma_t^3)$$

$$T_{S_1 S_4}^{23} = 0$$

i) $\rho = 3$ et $\nu = 1$

$$T_{S_1 S_3}^{31} = -T_{S_1 S_2}^{31} = \frac{2}{3\pi} \frac{b}{a} \tan^{-1} \frac{a}{b} + \frac{\Sigma_t}{4} \left(-\frac{b^2}{a} \ln \frac{R+a}{b} + R - a \right) \\ + \frac{\Sigma_t^2}{3\pi} \left(b^2 - \frac{b^3}{a} \tan^{-1} \frac{a}{b} - a^2 \ln \frac{a}{R} \right) + O(X^3 \Sigma_t^3)$$

$$T_{S_1 S_4}^{31} = 0$$

donc, $T_{S_1 \partial D}^{31} = 0$

j) $\rho = 3$ et $\nu = 2$

$$T_{S_1 S_3}^{32} = -T_{S_1 S_2}^{32} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2b}{a} - \frac{b^2}{aR} - \frac{R}{a} \right) + \frac{2\Sigma_t}{3\pi} \frac{b^2}{a} \ln \frac{b}{R} \\ + \frac{\Sigma_t^2}{12} \left(\frac{2b^2}{a} (R-b) - a(R-a) \right) + O(X^3 \Sigma_t^3)$$

$$T_{S_1 S_4}^{32} = 0$$

k) $\rho = 3$ et $\nu = 3$

$$-T_{S_1 S_3}^{33} = -T_{S_1 S_2}^{33} = \frac{b}{8R} - \frac{\Sigma_t}{3\pi} \left(\frac{b^2}{a} \tan^{-1} \frac{a}{b} + a \tan^{-1} \frac{b}{a} - b \right) \\ + \frac{\Sigma_t^2}{12} \left(\frac{b^3}{a} \ln \frac{R+a}{b} + a^2 \ln \frac{R+b}{a} - bR \right) + O(X^3 \Sigma_t^3)$$

$$T_{S_1 S_4}^{33} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{a} (R - b) - \frac{a}{R} \right) - \frac{4\Sigma_t}{3\pi} \left(b \tan^{-1} \frac{a}{b} + 2 \frac{b^2}{a} \ln \frac{b}{R} \right) \\ + \frac{\Sigma_t^2}{2} \left(b^2 \ln \frac{R+a}{b} - \frac{2b^2}{a} (R-b) \right) + O(\chi^3 \Sigma_t^3)$$

1) $\rho = 4$ et $\nu = 4$

$$T_{S_1 S_3}^{44} = T_{S_1 S_2}^{44} = \frac{3}{8} \frac{a+b-R}{a} + \frac{2\Sigma_t}{3\pi a} \left(a^2 \ln \frac{a}{R} + b^2 \ln \frac{b}{R} \right) + \frac{\Sigma_t^2}{12a} (R^3 - a^3 - b^3) + O(\chi^3 \Sigma_t^3) \\ T_{S_1 S_4}^{44} = \frac{3}{4} \frac{R-b}{a} - \frac{8}{3\pi} \Sigma_t \left(b \tan^{-1} \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a} \ln \frac{b}{R} \right) + \frac{\Sigma_t^2}{2} \left(\ln \frac{R+a}{b} - \frac{R-b}{a} \right) + O(\chi^3 \Sigma_t^3)$$

Les équations précédentes peuvent se combiner pour donner les probabilités de fuites :

$$P_{iS_1}^1 = \frac{1}{4b\Sigma_t} (1 - P_{S_1 \partial D}^{11}) \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{b}{a} \ln \frac{b}{R} - \frac{a}{b} \ln \frac{a}{R} + 2 \tan^{-1} \frac{a}{b} \right) \\ - \frac{\Sigma_t}{4} \left(\frac{1}{3ab} (R^3 - a^3 - b^3) - b \frac{R-b}{a} + b \ln \frac{R+a}{b} \right) + O(\chi^2 \Sigma_t^2)$$

$$P_{iS_1}^2 = \frac{1}{4b\Sigma_t} (2\sqrt{2} P_{S_1 \partial D}^{11} - 3\sqrt{2} T_{S_1 \partial D}^{21}) \\ = 3\sqrt{2} Q_{iS_1}^2 - 2\sqrt{2} P_{iS_1}^1$$

avec :

$$Q_{iS_1}^2 = \frac{1}{4b\Sigma_t} \left(\frac{2}{3} - T_{S_1 \partial D}^{21} \right) \\ = \frac{1}{8} \left(\frac{a}{b} \ln \frac{R+b}{a} + \frac{R-b}{a} \right) \\ - \frac{\Sigma_t}{6\pi} \left(a + \frac{2b^2}{a} \ln \frac{b}{R} + 3b \tan^{-1} \frac{a}{b} - \frac{a^2}{b} \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \\ + O(\chi^2 \Sigma_t^2)$$

$$P_{iS_1}^3 = 0$$

Ces équations peuvent encore se combiner pour obtenir la probabilité de collision volumique :

$$p_{ii} = \frac{1}{\Sigma_t} \left[1 - 2(P_{iS_1}^1 + P_{iS_2}^1) \right] \\ = \frac{a}{2} \ln \frac{R+b}{a} + \frac{b}{2} \ln \frac{R+a}{b} - \frac{1}{6ab} (R^3 - a^3 - b^3) + O(\chi \Sigma_t)$$

Si la cellule est carrée, cette équation se simplifie pour donner :

$$p_{ii} = 0.7433 a + 0(\Sigma a)$$

ce qui correspond à un facteur Q égal à :

$$Q = \frac{\langle X^2 \rangle}{\langle X \rangle^2} = 1.4866$$

B.2.2 - Dérivées des probabilités de collision

On dérivera par rapport à Σ_t les probabilités de transmission du rectangle homogène (section B.2) :

a) $\rho = 1$ et $\nu = 1$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{S_1 S_3}^{11} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{S_1 S_2}^{11} = -\frac{1}{\Sigma_t} P_{S_1 S_3}^{11} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin \varphi \text{Ki}_3 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \sin \varphi \text{Ki}_3 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} P_{S_1 S_4}^{11} = -\frac{4b}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \left(1 - \frac{b}{a} \tan \varphi \right) \text{Ki}_2 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

b) $\rho = 1$ et $\nu = 2$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{12} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{12} = -\frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{12} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin^2 \varphi \text{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \text{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{12} = -\frac{4b}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) \text{Ki}_3 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

c) $\rho = 1$ et $\nu = 3$

$$-\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{13} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{13} = -\frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{13} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \text{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \sin^2 \varphi \text{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{13} = 0$$

e) $\rho = 2$ et $\nu = 1$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{21} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{21} = -\frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{21} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \operatorname{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \sin^2 \varphi \operatorname{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{21} = -\frac{4b}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) \operatorname{Ki}_3 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

f) $\rho = 2$ et $\nu = 2$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{22} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{22} = -\frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{22} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{22} = -\frac{4b}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) \operatorname{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

g) $\rho = 2$ et $\nu = 3$

$$-\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{23} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{23} = -\frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{23} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \sin^3 \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{23} = 0$$

i) $\rho = 3$ et $\nu = 1$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{31} = -\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{31} = -\frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{31} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin^2 \varphi \operatorname{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \operatorname{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{31} = 0$$

j) $\rho = 3$ et $\nu = 2$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{32} = - \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{32} = - \frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{32} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin^3 \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right. \\ \left. + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{32} = 0$$

k) $\rho = 3$ et $\nu = 3$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{33} = - \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{33} = \frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{33} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right. \\ \left. + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{33} = - \frac{4b}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin \varphi \tan \varphi \left(\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right) \operatorname{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

l) $\rho = 4$ et $\nu = 4$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{44} = \frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_2}^{44} = - \frac{1}{\Sigma_t} T_{S_1 S_3}^{44} + \frac{2}{\pi a \Sigma_t} \left\{ b \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sin \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right] \right. \\ \left. + a \int_0^{\pi/2 - \varphi^*} d\varphi \sin \varphi \operatorname{Ki}_5 \left[\frac{\Sigma_t a}{\cos \varphi} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_t} T_{S_1 S_4}^{44} = - \frac{4b}{\pi} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \left(1 - \frac{b}{a} \tan \varphi \right) \operatorname{Ki}_4 \left[\frac{\Sigma_t b}{\cos \varphi} \right]$$

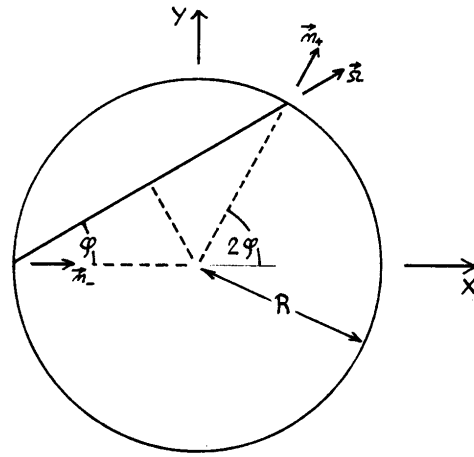


FIGURE B-1 Cylindre homogène

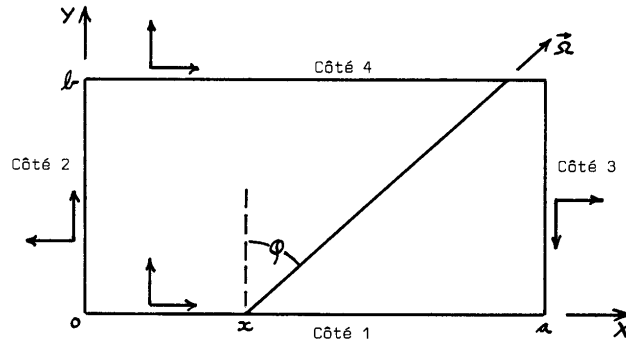


FIGURE B-2 Rectangle homogène